ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στην σελίδα 186 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεώρημα στην σελίδα 142 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Ορισμός στην σελίδα 161 του σχολικού βιβλίου.

Α4. α)Σωστό β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1 : Για το πεδίο ορισμού της fog πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \to D_{fog} = [0,1]$$

Με τύπο :

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2 : $h'(x) = 2(x-1) \cdot (x-1)' = 2(x-1) < 0$ στο [0,1] άρα h γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της h άρα h 1-1 ως γνησίως μονότονη συνάρτηση.

Για τον τύπο της h^{-1} θέτω :

$$y = h(x) \to y = (x-1)^2 \to \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \to$$

$$\sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{x \in [0,1]} \sqrt{y} = -(x-1) \to x = 1 - \sqrt{y}$$

Και επίσης το σύνολο τιμών της h είναι :

$$h([0,1]) \overset{h\searrow}{\to} [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της άρα :

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, \qquad D_{h^{-1}} = [0,1]$$

Β3 :

i)

- Η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών και στο 1 διότι :

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

Άρα $\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)=\frac{1}{2}$

- $\varphi(0)=1, \varphi(1)=\frac{1}{2}\to\varphi(0)\neq\varphi(1)$

Άρα , από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των φ(0) και φ(1) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ ώστε $\varphi(x_0)=\xi$

ii) Δίνεται ότι $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα το α ανήκει στο 1^{ο} τεταρτημόριο όπου εκεί το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε :

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\to \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\to\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\ \to \eta\mu\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα, για κάθε αριθμό ημα μεταξύ των f(0)=1 και f(1)=1/2 υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=\eta\mu\alpha$

Επιμέλεια:

ΚΑΛΑΪΤΖΙΔΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ, ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΤΣΑΝΤΙΛΑΣ ΣΩΤΗΡΗΣ, ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, ΒΑΝΟΥΣΗΣ ΧΡΙΣΤΟΣ, ΓΕΩΡΓΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ ΘΕΜΗΣ, ΠΡΩΙΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΠΕΤΡΑ ΖΩΗ, ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ ΝΙΚΗ, ΧΑΪΔΕΜΕΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΜΠΛΑΤΣΙΩΤΗ ΝΙΚΗ, ΓΙΑΝΝΑΚΑ ΧΡΙΣΤΙΝΑ, ΝΤΟΥΚΑΣ ΣΤΑΥΡΟΣ, ΦΡΑΝΤΖΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΦΡΑΓΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΓΚΟΛΕΜΗ ΖΑΧΑΡΕΝΙΑ, ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιά, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Μοσχάτο, Αμφιάλη, Νίκαια, Λαμία, Νέο Ηράκλειο, Φιλοθέη Νέο Ψυχικό, Καβάλα, Αργυρούπολη, Αρτέμιδα, Περιστέρι Κέντρο, Ηράκλειο Κρήτης, Νέος Κόσμος, Λευκάδα

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ